הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות רגילות ח' 104131

בוחן סמסטר אביב 7.5.14

משך הבוחן שעתיים, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
בבוחן ארבע שאלות. יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט**, על גבי המחברת המצורפת.

שאלה 1 (30%)

א. (15%) מצאו את המשפחה אורתוגונלית למשפחת העקומות

$$x^2 + y^2 = Cx^2 + 1$$

ב. (15%) פתרו את המשוואה

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}$$

שאלה 2 (25%)

מצאו פתרון כללי למשוואה

$$\left(2x - \frac{y^3}{x^2}\right)dx + \left(\frac{2y^2}{x} - \frac{x^2}{y}\right)dy = 0$$

בשיטת גורמי אינטגרציה בלבד. אפשר להשאיר פתרון כללי בצורה סתומה.

שאלה 3 (30%)

נתונה המשוואה

$$(x^2 + 2xy)y' = 2xy + 3y^2$$

א. (9%) מצאו הפתרונות בצורה מפורשת (אין צורך לרשום תחום הגדרה).

ב. (7%) עבור בעית תנאי ההתחלה $y(2) = 1$, האם תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים עבור המשוואה ביחד עם תנאי ההתחלה? בכל מקרה, מצאו את הפתרונות של בעיית תנאי ההתחלה, אם יש.

ג. (7%) עבור בעית תנאי ההתחלה $y(1) = -1$, האם תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים עבור המשוואה ביחד עם תנאי ההתחלה? בכל מקרה, מצאו את הפתרונות של בעיית תנאי ההתחלה, אם יש.

ד. (7%) עבור בעית תנאי ההתחלה $y(0) = 1$, האם תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים עבור המשוואה ביחד עם תנאי ההתחלה? בכל מקרה, מצאו את הפתרונות של בעיית תנאי ההתחלה, אם יש.

שאלה 4 (15%)

נתונה המשוואה

$$y' = 2x \cdot sin\left(\frac{\pi y}{2(x^2 + 8)}\right)$$

ביחד עם תנאי ההתחלה $y(8) = 11$.
הוכיחו כי קיים פתרון יחיד הפותר את המשוואה ביחד עם תנאי ההתחלה וכי פתרון זה מקיים

$$0 < y(x) < x^2 + 8$$

בתחום הגדרתו (אין צורך למצוא את תחום ההגדרה של הפתרון).